証明図の集合としての論理(非古典論理とそのKripke意味論に関する諸問題)

古森, 雄一

数理解析研究所講究録
927巻 1995年 53-55

証明図の集合としての論理

静岡大学 理学部 古森 雄一 (Yuichi Komori)

komori@sci.shizuoka.ac.jp

いろいろな論理を組織的に研究する分野 (特に, 中間論理) では, 論理とはある条件を満たす (modus ponens と代入に関して閉じている) 論理式の集合であった. 1987年に筆者は [Kom87] でいくつかの含意命題論理 (implicational propositional logic) の証明図の一意性についての問題を提出した (廣川さんと龍田さんが答えてくれた (cf. [Hir93], [KH93], [Tat93]). そこでは, 証明図というのは λ-term であり, BCK 論理の証明図である BCK ラムダ項が定義されている. また, Trigg([THB94]) 達は BB'I 論理や BB'IW 論理などの証明図を特徴づけている. これらの結果を眺めると, 証明図の集合こそが論理を決定しているのだ, という気になってくる. BCK, BB'I などの性質のよい論理ではこのように考えることは自然であるが, 直観主義含意命題論理より弱い論理すべてについてこのように考えるには, いくつかの困難がある. (本稿では論理式とは含意命題論理式 (implicational formula) であり, 証明図とはタイプフリーなラムダ項のことである.)

例えば, 論理式 $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ だけで公理化される論理を考えてみよう. $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ はラムダ項 $\lambda xy.x(xy)$ の principal type-scheme になっているので, この論理の証明図の集合は $\lambda xy.x(xy)$ を含んでいると考えたい. しかし一方で, この論理は BCK 論理に含まれるので, この論理の証明図の集合は BCK ラムダ項だけを含んでいるものと考えたい. ラムダ項 $\lambda xy.x(xy)$ は BCK ラムダ項ではないので困ってしまうのである. この困難をどのように考えて解消するのがよいのか, 筆者には今のところこれといった成案がない.

別の例は論理式 $(\alpha \to \alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha \to \alpha \to \beta$ だけで公理化される論理である. ラムダ項 $\lambda xy.(\lambda z.xyy)(xyyy)$ の principal type-scheme は $(\alpha \to \alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha \to \alpha \to \beta$ であるので, この論理の証明図の集合は $\lambda xy.(\lambda z.xyy)(xyyy)$ を含んでいると考える. ラムダ項 $\lambda xy.(\lambda z.xyy)(xyyy)$ は

β-reduction を行うと$\lambda xy.xyy$ になる．論理の証明図の集合は β-reduction について閉じているという要請を課すならば, $\lambda xy.xyy$ もこの論理の証明図とみなさなければならなくなる．$\lambda xy.xyy$ の principal type-scheme は $(\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$ であり, それはこの論理では証明できない論理式である．すなわち, β-reduction について閉じているという要請のために元の論理より強い論理の証明図の集合になってしまったのである．この困難は β-reduction について閉じているという要請を課さないことにすれば無くなるが, 証明図についての正規化定理が成り立つためには要請を満たしていなければならない．そこで β-reduction について閉じている証明図の集合で特徴づけられる論理はどのようなものであるか, という問題が考えられる．この問題に関連した, より具体的な問題を提出したい．

上に述べた困難な例はどちらも LJ-minimal でない論理式で公理化されたものである．

問題 1 *LJ-minimal* な論理式で公理化された論理は *type* づけ可能 *application* とβ*-reduction* に関して閉じたラムダ項により特徴づけられるか*?*

この問題をより正確に理解してもらうために, いくつかの定義を行う．まず, [Kom87] にある minimal の定義を述べる．

定義 2 論理式 β が論理式 α の代入例になっているとき, $\beta \trianglerighteq \alpha$ とかく．明らかに, 関係 $\trianglerighteq$ は擬順序である．S を論理式の集合とする．論理式 α が S の元で, $\alpha \trianglerighteq \beta$ であるような任意の S の元 β に対して $\beta \trianglerighteq \alpha$ となるとき, α は S-minimal であるという．

LJ により直観主義論理で証明できる含意命題論理式全体の集合をあらわす．論理式の集合 S を代入と modus ponens に関して閉じたものを $\overline{S}$ とかく．すなわち, $\overline{S}$ は S を含む最少の論理である．

定義 3 $\mathcal{A}$ をラムダ項の集合とする．$\mathcal{A}$ の任意の元 s, t について, *st* が *type* づけ可能ならば $st \in \mathcal{A}$ となっているとき, $\mathcal{A}$ は *type* づけ可能 *application* に関して閉じているという．

定義 4 $\mathcal{A}$ をラムダ項の集合とする．$L(\mathcal{A})$ により論理式の集合 $\{\alpha | \exists t \in \mathcal{A}(\alpha$は t のタイプである$)\}$ をあらわす．$\mathcal{A}$ が *type* づけ可能 *application* に関して閉じていれば $L(\mathcal{A})$ は論理になる．そのとき, $\mathcal{A}$ は論理 $L(\mathcal{A})$ を特徴づけるという．

先に述べた問題は次の予想が正しいか, という問題である.

予想 5 S が *LJ-minimal* な論理式の集合ならば, $\overline{S}$ を特徴づける *type* づけ可能 *application* と *β-reduction* に関して閉じたラムダ項の集合が存在する.

また β-reduction について閉じているラムダ項の集合で特徴づけられる論理がどれくらいあるのかというのも面白い問題である.

問題 6 *type* づけ可能 *application* と *β-reduction* に関して閉じたラムダ項の集合で特徴づけられる論理はどれくらいあるか *(*有限か, 加算か連続濃度か*)?*.

参考文献

[Hir93] Sachio Hirokawa. Principal types of BCK-lambda-terms. *Theoretical Computer Science*, Vol. 107, pp. 253–276, 1993.

[HS86] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Introduction to combinators and λ-calculus*, Vol. 1 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, 1986.

[KH93] Yuichi Komori and Sachio Hirokawa. The number of proofs for a BCK-formula. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 58, pp. 626–628, 1993.

[Kom87] Yuichi Komori. BCK–algebras and lambda calculus. In *Proc. 10th Symp. on semigroups*, pp. 5–11, Sakado, 1987. Josai Univ.

[Tat93] Makoto Tatusta. Uniqueness of normal proofs of minimal formulas. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 58, pp. 789–799, 1993.

[THB94] Peter Trigg, J. Roger Hindley, and Martin W. Bunder. Combinatry abstraction using B, B' and friends. *Theoretical Computer Science*, Vol. 135, pp. 405–422, 1994.